Volume 4, Issue 2, February – 2026 ISSN (E): 2938-379X

FORCED OSCILLATIONS OF A RECTANGULAR TWO-LAYER PIECEWISE HOMOGENEOUS PLATE OF CONSTANT THICKNESS

Хаджиева Салима Садиковна
Андижанский государственный технический институт,
старший преподаватель,
tel:+99(890) 2032066, sxadjiyeva011@gmail.com.,

Abstract
This article examines the forced vibrations of a rectangular, two-layer, piecewise homogeneous plate of constant thickness subjected to an external harmonic disturbance. The plate consists of two layers with different physical and mechanical properties, such as elastic modulus, density, and Poisson's ratio, with each layer assumed to be homogeneous within its own region.
Based on the classical theory of thin plates and the equations of elastic dynamics, a mathematical model of forced vibrations is derived. The influence of interlayer interaction and boundary conditions corresponding to different types of plate edge fastening are taken into account. A distributed harmonic load, causing steady-state vibrations, is considered as the external disturbance.
To solve the problem, the method of separation of variables and expansion of the desired functions into series in terms of natural vibration modes are used. Analytical expressions are obtained for the deflection amplitudes and the stress-strain state of the plate depending on the frequency of the external disturbance. An analysis of resonance phenomena and the influence of layer parameters on the dynamic behavior of the structure is conducted. The results of the study can be used in the design and calculation of multilayer structural elements in mechanical engineering, construction, and aerospace engineering, where consideration of dynamic loads and the layered structure of materials is required.

Keywords: Construction, multilayer structures, piecewise homogeneous plates, vibration equation, two-layer plate, differential equation, calculation, transverse displacement, forced vibrations, resonance, method of separation of variables, linear theory of elasticity, frequency analysis, boundary conditions.

Introduction

ВВЕДЕНИЕ

Огромный размах строительства в нашей стране приводит к необходимости улучшения положений строительной науки, которые недостаточно отвечают возросшим требованиям строительной практики. Одним из таких вопросов является вопрос развития теории расчета многослойных конструкций (в частности, кусочно-однородных пластин).

Применение многослойных конструкций при их рациональном проектировании позволяет обеспечить достижение высокой удельной жесткости и прочности, требуемых звуко— теплоизоляционных свойств, демпфирующих и вибропоглощающих характеристик, и их работа существенно влияет на напряженное состояние всей конструкции здания и сооружения. Поэтому развитие эффективных методов расчета таких конструкций является актуальной задачей.

Расчету многослойных пластин посвящено большое число работ. Анализ таких работ приведен в образах [2,3,4] и др. Теория расчета многослойных конструкций была развита в работах А.Я. Александрова, С.А. Амбурцумяна, В.В. Болотина, Л.Э. Брюккера, А.С. Вольмира, В.А. Воронича, Э.И. Григолюка, М.А.Ильгама, В.И. Королева, Х.М. Муштари, Ю.Н. Новичкова, Э.С.Остерника, В.В. Пикуля, А.П.Пурсакова, А.Л. Рабиновича, А.Р. Ржаницына, А.Ф. Рябова, А.В. Саченкова, Н.Г. Тамурова, И.Г. Терегулова, П.П. Чулкова и других авторов.

В ранних работах по расчету многослойных пластин трехмерная задача теории упругости сводилось к двумерной путем использования гипотез Кирхгоффа-Лява для всего пакета слоев. Такой подход к построению теории является корректным лишь в случае, когда жесткости отдельных слоев, составляющих пакет, одного порядка.

Динамическое поведение элементов конструкций и сооружений с учётом распространения волновых процессов в сплошных деформируемых средах с точки зрения математической и теоретической физики описывается дифференциальными уравнениями гиперболического типа. С точки зрения механики и физики только уравнения гиперболического типа выражают конечность скорости распространения волн или любого возмущения в среде.

Рассмотрим случай, когда материал верхнего слоя кусочно – однородной двухслойной пластинки упругий, а другой удовлетворяет модели Максвелла, то есть вязкоупругий.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Общие уравнения колебаний кусочно-однородных вязкоупругих пластин постоянной толщины, описанные в [1], сложны по структуре и содержат производные любого порядка по координатам x,yи времениt, и поэтому не пригодны для решения прикладных задач и проведения инженерных расчетов.

Для решения прикладных задач вместо общих уравнений целесообразно пользоваться приближенными, которые включают тот или иной конечный порядок по производным.

Классические уравнения поперечного колебания пластинки содержат производные не выше 4-го порядка, а для кусочно-однородных или двухслойных пластин простейшее приближенное уравнение колебания является уравнением шестого порядка.

Задачу сводим к нахождению поперечного смещения W точек плоскости контакта двуслойной пластинки, удовлетворяющий приближенному уравнению, полученному в первой главе, заменяя только вязкоупругие оператора L_0 и M_0 на упругие коэффициенты Ляме λ_0 и μ_0 соответственно:

Web of Teachers: Inderscience Research
webofjournals.com/index.php/1

$$Q_1\left(\frac{\partial^4 W}{\partial t^4}\right)+Q_2\left(\Delta\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)+Q_3\left(\Delta^2 W\right)+Q_4\left(\frac{\partial^6 W}{\partial t^6}\right)+Q_5\left(\Delta\frac{\partial^4 W}{\partial t^4}\right)+$$
$$+Q_6\left(\Delta^2\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)+Q_7\left(\Delta^3 W\right)=F_1(x,y,t). \tag{1.1}$$

где операторы Q_j определяются по формулам (1.1).

Если двуслойная пластинка занимает область $0\le x\le l_1,\ \ 0\le y\le l_2$ и ее все четыре края шарнирно оперты, то в этой задаче граничные условия для смещения W имеют вид:

$$W=\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}=0;\ \ (x=0;\ \ x=l_1) \tag{1.2}$$
$$W=\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}=0;\ \ (y=0;\ \ y=l_2)$$

Вынужденные колебания пластинки возбуждаются ненулевыми начальными условиями, то есть

$$W=\varphi(x,y);\quad \frac{\partial W}{\partial y}=\psi(x,y);$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=\ldots=\frac{\partial^7 W}{\partial y^7}=0. \tag{1..3}$$

при этом функции φ и ψ должны удовлетворять условиям типа (2.1.2), то есть

$\varphi=0;\quad \psi=0;\quad (x=0; x=l_1; y=0; y=l_2).$

Приведем уравнение (1.3) к виду

$$[M_1^3(\zeta_1)+M_1^2(\zeta_2)+M_1(\zeta_3)+\zeta_4](W)=0, \tag{1.4}$$

где операторы ζ_j равны:

$$\zeta_1=A_6\frac{\partial^4}{\partial x^4}+A_{14}\frac{\partial^6}{\partial t^2\partial x^4}+A_{18}\frac{\partial^6}{\partial x^6};$$
$$\zeta_2=A_3\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial x^2}+A_5\frac{\partial^4}{\partial x^4}+A_{10}\frac{\partial^6}{\partial t^4\partial x^2}+A_{15}\frac{\partial^6}{\partial t^2\partial x^4}+A_{17}\frac{\partial^6}{\partial x^6}; \tag{1.5}$$
$$\zeta_3=A_1\frac{\partial^4}{\partial t^4}+A_2\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial x^2}+A_4\frac{\partial^4}{\partial x^4}+A_7\frac{\partial^6}{\partial t^6}+$$
$$+A_{11}\frac{\partial^6}{\partial t^4\partial x^2}+A_{13}\frac{\partial^6}{\partial x^6}+A_{13}\frac{\partial^6}{\partial t^2\partial x^4}+A_{16}\frac{\partial^6}{\partial x^6};$$
$$\zeta_4=A_8\frac{\partial^6}{\partial x^6}+A_9\frac{\partial^6}{\partial t^4\partial x^2}+A_{12}\frac{\partial^6}{\partial t^2\partial x^4};$$

 ISSN (E): 2938-379X

Модели Максвелла имеют вид:

$$M_1(\zeta)=\mu_1(\zeta-\frac{1}{\tau}\int_0^t e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}}\zeta(\xi)d\xi);$$

$$M_1^2(\zeta)=\mu_1^2(\zeta-\frac{2}{\tau}\int_0^t e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}}\zeta(\xi)d\xi)+\frac{2}{\tau^2}\int_0^t e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}}(t-\xi)\zeta(\xi)d\xi); \quad (1.6)$$

$$M_1^3(\zeta)=\mu_1^3(\zeta-\frac{3}{\tau}\int_0^t e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}}\zeta(\xi)d\xi)+\frac{3}{\tau^2}\int_0^t e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}}(t-\xi)\zeta(\xi)d\xi)-$$
$$-\frac{1}{2\tau^3}\int_0^t e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}}(t-\xi)^2\zeta(\xi)d\xi); \quad (1.6)$$

где M_1^j – вязкоупругие операторы, которые для модели Максвелла

Подставляя (1.5) в (1.3), после некоторых преобразований получим уравнение колебания кусочно-однородной двуслойной пластинки в дифференциальной форме

$$\begin{gathered}G_1\left(\frac{\partial^4 W}{\partial t^4}\right)+G_2\left(\Delta\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)+G_3\left(\Delta^2 W\right)+G_4\left(\frac{\partial^5 W}{\partial t^5}\right)+G_5\left(\Delta\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}\right)+\\+G_6\left(\Delta^2\frac{\partial W}{\partial t}\right)+G_7\left(\frac{\partial^6 W}{\partial t^6}\right)+G_8\left(\Delta\frac{\partial^4 W}{\partial t^4}\right)+G_9\left(\Delta^2\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)+G_{10}\left(\Delta^3 W\right)+\\+G_{11}\left(\frac{\partial^7 W}{\partial t^7}\right)+G_{12}\left(\Delta\frac{\partial^5 W}{\partial t^5}\right)+G_{13}\left(\Delta^2\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}\right)+G_{14}\left(\Delta^3\frac{\partial W}{\partial t}\right)+G_{15}\left(\frac{\partial^8 W}{\partial t^8}\right)+\\+G_{16}\left(\Delta\frac{\partial^6 W}{\partial t^6}\right)+G_{17}\left(\Delta^2\frac{\partial^4 W}{\partial t^4}\right)+G_{18}\left(\Delta^3\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)=0,\end{gathered} \quad (1.7)$$

В силу граничных условий (1.2) искомое смещение W будем искать в виде

$$W=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}W_{n,m}(t)\sin(\gamma_n x)\sin(\nu_m y), \quad (1.8)$$

где n, m – номера гармоник колебания в соответствующих направлениях x, y.Решение (1.8) будет удовлетворять граничным условиям (1.3), если

$$\gamma_n=\frac{\pi n}{l_1}; \quad \nu_m=\frac{\pi m}{l_2};$$

где l_1 и l_2 – геометрические размеры пластинки.

Подставляя выражение (1.8) в уравнение (1.7), для $W_{n,m}(t)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered}W_{n,m}^{VIII}+B_1W_{n,m}^{VII}+B_2W_{n,m}^{VI}+B_3W_{n,m}^{V}+B_4W_{n,m}^{IV}+\\+B_5W_{n,m}^{III}+B_6W_{n,m}^{II}+B_7W_{n,m}^{I}+B_8W_{n,m}=0,\end{gathered} \quad (1.9)$$

где коэффициенты при производных равны:

$$B_1=\frac{G_{11}}{G_{15}};\quad B_2=\frac{1}{G_{15}}\left(G_7-\frac{\gamma}{h_0^2}G_{16}\right);\quad B_3=\frac{1}{G_{15}}\left(G_4-\frac{\gamma}{h_0^2}G_{12}\right);$$

$$B_4=\frac{1}{G_{15}}\left(G_7-\frac{\gamma}{h_0^2}G_{18}-\frac{\gamma}{h_0^2}G_{17}\right);\quad B_5=-\frac{1}{G_{15}}\frac{\gamma}{h_0^2}\left(G_5-\frac{\gamma}{h_0^2}G_{13}\right);\tag{1.10}$$

$$B_6=-\frac{1}{G_{15}}\frac{\gamma}{h_0^2}\left(G_2-\frac{\gamma}{h_0^2}G_9+\frac{\gamma^2}{h_0^4}G_{18}\right);\quad B_7=\frac{1}{G_{15}}\frac{\gamma^2}{h_0^4}\left(G_6-\frac{\gamma}{h_0^2}G_{14}\right);$$

$$B_8=\frac{1}{G_{15}}\frac{\gamma^2}{h_0^4}\left(G_3-\frac{\gamma}{h_0^2}G_{10}\right);$$

а $\gamma=\left(\frac{\pi h_0}{l_1}n\right)^2+\left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2;$

Решение уравнения (1.9) ищем в виде

$$W_{n,m}=W_0\exp\left(\frac{b_0}{h_0}\xi\cdot t\right),\tag{1.11}$$

где ξ – безразмерная, в общем случае, комплексная частота, дейстительная часть которой характеризует затухание колебаний пластики, а минимая часть собственных колебаний шарнирно опертой-однородной пластинки.

Подставляя выражение (1.11) в уравнение (1.9), для комплексной частоты ξ получаем алгебраичекое уравнение восьмого порядка

$$\xi^8+B_1'\xi^7+B_2'\xi^6+B_3'\xi^5+B_4'\xi^4+B_5'\xi^3+B_6'\xi^2+B_7'\xi+B_8'=0,\tag{1.12}$$

где

$$B_1'=\frac{G_{11}'}{G_{15}'};\quad B_2'=\frac{1}{G_{15}'}\left(G_7'-\frac{\gamma}{h_0^2}G_{16}'\right);\quad B_3'=\frac{1}{G_{15}'}\left(G_4'-\frac{\gamma}{h_0^2}G_{12}'\right);$$

$$B_4'=\frac{1}{G_{15}'}\left(G_7'-\frac{\gamma}{h_0^2}G_{18}'-\frac{\gamma}{h_0^2}G_{17}'\right);\quad B_5'=-\frac{1}{G_{15}'}\frac{\gamma}{h_0^2}\left(G_5'-\frac{\gamma}{h_0^2}G_{13}'\right);\tag{1.13}$$

$$B_6'=-\frac{1}{G_{15}'}\frac{\gamma}{h_0^2}\left(G_2'-\frac{\gamma}{h_0^2}G_9'+\frac{\gamma^2}{h_0^4}G_{18}'\right);\quad B_7'=\frac{1}{G_{15}'}\frac{\gamma^2}{h_0^4}\left(G_6'-\frac{\gamma}{h_0^2}G_{14}'\right);$$

$$B_8'=\frac{1}{G_{15}'}\frac{\gamma^2}{h_0^4}\left(G_3'-\frac{\gamma}{h_0^2}G_{10}'\right);$$

и введены безразмерные параметры

$$h=\frac{h_1}{h_0};\quad \rho=\frac{\rho_1}{\rho_0};\quad P_2=\frac{\mu_1}{\mu_0};\quad c=\frac{h_1}{\tau b_0};\quad b=\frac{b_1}{b_0};\quad D_0=\frac{1}{2(1-\nu_0)};\quad D_1=\frac{1}{2(1-\nu_1)}.$$

Здесь:

ν_0, ν_1 – коэффициенты Пуассона материала слоев пластинки;

b_0, b_1 – скорости распространения поперечных волн материала слоев пластинки;

c – параметр, учитывающий время релаксации τ, толщину верхнего слоя h_0 пластинки и скорость b_0.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Исходя из теоремы Гурвица [5] и положительности коэффициентов (1.13), следует, что действительные части комплексных корней алгебраического уравнения (1.12) отрицательны, что отвечает затухающему характеру колебания двухслойной пластинки, а мнимые части характеризуют частоты собственных колебаниядвухслойной пластинки. Обазначим корней алгебраического уравнения (1.12) в виде

$$\xi_1 = \operatorname{Re}\xi_{10};\quad \xi_2 = \operatorname{Re}'\xi_{10};\quad \xi_{3,4} = \operatorname{Re}\xi_{20} \pm i\operatorname{Im}\xi_{20};$$
$$\xi_{5,6} = \operatorname{Re}\xi_{30} \pm i\operatorname{Im}\xi_{30};\quad \xi_{7,8} = \operatorname{Re}\xi_{40} \pm i\operatorname{Im}\xi_{40};$$

при этом $\operatorname{Re}\xi_{j0}$ коэффициенты затухания, а $\operatorname{Im}\xi_{j0}$ – частоты собственных колебаний. Исходя из характера корней характеристического уравнения, общее решение задачи можем записать в виде

$$W_{n,m} = e^{-\delta_{1(1)}^{(n,m)}\cdot t}C_1 + e^{-\delta_{1(2)}^{(n,m)}\cdot t}C_2 + e^{-\delta_2^{(n,m)}\cdot t}\left[C_3\cos(\alpha_{n,m}t) + C_4\sin(\alpha_{n,m}t)\right] +$$
$$+ e^{-\delta_3^{(n,m)}\cdot t}\left[C_5\cos(\beta_{n,m}t) + C_6\sin(\beta_{n,m}t)\right] + e^{-\delta_4^{(n,m)}\cdot t}\left[C_7\cos(\gamma_{n,m}t) + C_8\sin(\gamma_{n,m}t)\right], \quad (1.14)$$

где введены обозначения:

$$\delta_{1(1)}^{(n,m)} = -\frac{b_0}{h_0}\operatorname{Re}\xi_{10};\quad \delta_{1(2)}^{(n,m)} = -\frac{b_0}{h_0}\operatorname{Re}'\xi_{10};\quad \delta_j^{(n,m)} = -\frac{b_0}{h_0}\operatorname{Re}\xi_{j0};\quad (j = 2,3,4)$$
$$\alpha_{n,m} = \frac{b_0}{h_0}\operatorname{Im}\xi_{20};\quad \beta_{n,m} = \frac{b_0}{h_0}\operatorname{Im}\xi_{30};\quad \gamma_{n,m} = \frac{b_0}{h_0}\operatorname{Im}\xi_{40} \quad (1.15)$$

Для определения постоянных C_j функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ разложим на двойные ряды Фурье

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_{n,m}\sin\left(\frac{\pi n}{l_1}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{l_2}y\right),$$
$$\psi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{n,m}\sin\left(\frac{\pi n}{l_1}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{l_2}y\right) \quad (1.16)$$

Удевлетворяя решение (1.8) с выражениями (1.14) и (1.15), и начальними условиями (1.3а), для C_j получим систему алгебраических линейных уравнений

Volume 4, Issue 2, February – 2026 ISSN (E): 2938-379X

$$
\begin{aligned}
&C_1 + C_2 + C_3 + C_5 + C_7 = \varphi_{n,m};\\
&-\delta_{1(1)}^{(n,m)} C_1 - \delta_{1(2)}^{(n,m)} C_2 - \delta_2^{(n,m)} C_3 + \alpha_{n,m} C_4 - \delta_3^{(n,m)} C_5 + \qquad (1.17)\\
&+\beta_{n,m} C_6 - \delta_4^{(n,m)} C_7 + \gamma_{n,m} C_8 = \psi_{n,m};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\delta_{1(1)}^{(n,m)})^2 C_1 - (\delta_{1(2)}^{(n,m)})^2 C_2 + [(\delta_2^{(n,m)})^2 + \alpha_{n,m}^2] C_3 - 2\delta_2^{(n,m)} \alpha_{n,m} C_4 +\\
&+[(\delta_3^{(n,m)})^2 + \beta_{n,m}^2] C_5 - 2\delta_3^{(n,m)} \beta_{n,m} C_6 - [(\delta_4^{(n,m)})^2 - \gamma_{n,m}^2] C_7 - 2\delta_4^{(n,m)} \gamma_{n,m} C_8 = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\delta_{1(1)}^{(n,m)})^3 C_1 - (\delta_{1(2)}^{(n,m)})^3 C_2 + \delta_2^{(n,m)}[(\delta_2^{(n,m)})^2 + \alpha_{n,m}^2] C_3 -\\
&-\alpha_{n,m}[3(\delta_2^{(n,m)})^2 - \alpha_{n,m}^2] C_4 + \delta_3^{(n,m)}[(\delta_3^{(n,m)})^2 + \beta_{n,m}^2] C_5 -\\
&-\beta_{n,m}[3(\delta_3^{(n,m)})^2 - \beta_{n,m}^2] C_6 + \delta_4^{(n,m)}[(\delta_4^{(n,m)})^2 - 3\gamma_{n,m}^2] C_7 - \qquad (1.17)\\
&-\gamma_{n,m}[3(\delta_4^{(n,m)})^2 - \gamma_{n,m}^2] C_8 = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\delta_{1(1)}^{(n,m)})^4 C_1 - (\delta_{1(2)}^{(n,m)})^4 C_2 + [(\delta_2^{(n,m)})^4 - 6(\delta_2^{(n,m)})^2 \alpha_{n,m}^2 + \alpha_{n,m}^4] C_3 -\\
&-\delta_2^{(n,m)} \alpha_{n,m}[(\delta_2^{(n,m)})^2 - \alpha_{n,m}^2] C_4 + [(\delta_3^{(n,m)})^4 - 6(\delta_3^{(n,m)})^2 \beta_{n,m}^2 + \beta_{n,m}^4] C_5 -\\
&-\delta_3^{(n,m)} \beta_{n,m}[(\delta_3^{(n,m)})^2 - \beta_{n,m}^2] C_6 + [(\delta_4^{(n,m)})^4 - 6(\delta_4^{(n,m)})^2 \gamma_{n,m}^2 + \gamma_{n,m}^2] C_7 -\\
&-\delta_4^{(n,m)} \gamma_{n,m}[3(\delta_4^{(n,m)})^2 - \gamma_{n,m}^2] C_8 = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\delta_{1(1)}^{(n,m)})^5 C_1 - (\delta_{1(2)}^{(n,m)})^5 C_2 + \delta_2^{(n,m)}[(\delta_2^{(n,m)})^4 - 7(\delta_2^{(n,m)})^2 \alpha_{n,m}^2 + \alpha_{n,m}^4] C_3 -\\
&-\alpha_{n,m}[2(\delta_2^{(n,m)})^4 - 7(\delta_2^{(n,m)})^2 \alpha_{n,m}^2 + \alpha_{n,m}^4] C_4 +\\
&+\delta_3^{(n,m)}[(\delta_3^{(n,m)})^4 - 7(\delta_3^{(n,m)})^2 \beta_{n,m}^2 + 2\beta_{n,m}^4] C_5 -\\
&-\beta_{n,m}[2(\delta_3^{(n,m)})^4 - 7(\delta_3^{(n,m)})^2 \beta_{n,m}^2 + \beta_{n,m}^4] C_6 -\\
&-\delta_4^{(n,m)}[(\delta_4^{(n,m)})^4 - 7(\delta_4^{(n,m)})^2 \gamma_{n,m}^2 + 2\gamma_{n,m}^4] C_7 -\\
&-\gamma_{n,m}[2(\delta_4^{(n,m)})^4 - 7(\delta_4^{(n,m)})^2 \gamma_{n,m}^2 - \gamma_{n,m}^4] C_8 = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\delta_{1(1)}^{(n,m)})^6 C_1 - (\delta_{1(2)}^{(n,m)})^6 C_2 + [(\delta_2^{(n,m)})^6 - 9(\delta_2^{(n,m)})^4 \alpha_{n,m}^2 + 9(\delta_2^{(n,m)})^2 \alpha_{n,m}^4 - \alpha_{n,m}^6] C_3 -\\
&-\delta_2^{(n,m)} \alpha_{n,m}[3(\delta_2^{(n,m)})^4 - 14(\delta_2^{(n,m)})^2 \alpha_{n,m}^2 + 3\alpha_{n,m}^4] C_4 +\\
&+[(\delta_3^{(n,m)})^6 - 9(\delta_3^{(n,m)})^4 \beta_{n,m}^2 + 9(\delta_3^{(n,m)})^2 \beta_{n,m}^4 - \beta_{n,m}^6] C_5 -\\
&-\delta_3^{(n,m)} \beta_{n,m}[3(\delta_3^{(n,m)})^4 - 14(\delta_3^{(n,m)})^2 \beta_{n,m}^2 + 3\beta_{n,m}^4] C_6 -\\
&-[(\delta_4^{(n,m)})^6 - 9(\delta_4^{(n,m)})^4 \gamma_{n,m}^2 + 9(\delta_4^{(n,m)})^2 \gamma_{n,m}^4 - \gamma_{n,m}^6] C_7 -\\
&-\delta_4^{(n,m)} \gamma_{n,m}[3(\delta_4^{(n,m)})^4 - 14(\delta_4^{(n,m)})^2 \gamma_{n,m}^2 + 3\gamma_{n,m}^4] C_8 = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\delta_{1(1)}^{(n,m)})^7 C_1 - (\delta_{1(2)}^{(n,m)})^7 C_2 + \delta_2^{(n,m)}[(\delta_2^{(n,m)})^6 - 12(\delta_2^{(n,m)})^4 \alpha_{n,m}^2 + \qquad (1.17)\\
&+21(\delta_2^{(n,m)})^2 \alpha_{n,m}^4 - 4\alpha_{n,m}^6] C_3 -
\end{aligned}
$$

Web of Teachers: Inderscience Research
webofjournals.com/index.php/1

$$-\alpha_{n,m}[4(\delta_2^{(n,m)})^6 - 21(\delta_2^{(n,m)})^4\alpha_{n,m}^2 + 12(\delta_2^{(n,m)})^2\alpha_{n,m}^4 - \alpha_{n,m}^6]C_4 +$$
$$-(\delta_3^{(n,m)}[(\delta_3^{(n,m)})^6 - 12(\delta_3^{(n,m)})^4\beta_{n,m}^2 + 21(\delta_3^{(n,m)})^2\beta_{n,m}^4 - 4\beta_{n,m}^6]C_5 -$$
$$-\beta_{n,m}[4(\delta_3^{(n,m)})^6 - 21(\delta_3^{(n,m)})^4\beta_{n,m}^2 + 12(\delta_3^{(n,m)})^2\beta_{n,m}^4 - \beta_{n,m}^6]C_6 -$$
$$-\delta_4^{(n,m)}[(\delta_4^{(n,m)})^6 - 12(\delta_4^{(n,m)})^4\gamma_{n,m}^2 + 21(\delta_4^{(n,m)})^2\gamma_{n,m}^4 - 4\gamma_{n,m}^6]C_7 -$$
$$-\gamma_{n,m}[4(\delta_4^{(n,m)})^6 - 21(\delta_4^{(n,m)})^4\gamma_{n,m}^2 + 12(\delta_4^{(n,m)})^2\gamma_{n,m}^4 - \gamma_{n,m}^4]C_8 = 0.$$

Формула (1.14) совместно с (1.17) дает решение задачи о вынужденных колебаниях прямоугольной шарнирно опертой кусочно-однородной двухслойной пластинки.

Рассмотрим случай, когда оба слоя кусочно-однородной двухслойной пластинки упруги. Для решения этой задачи будем использовать приближенное уравнение колебания кусочно-однородной пластинки (1.12), а коэффициенты Q_j определяются по формулам (1.3), при этом заменяются вязкоупругие операторы M_0 и M_1 на коэффициенты Ляме μ_0 и μ_1 соответственно.

Внешние нагрузки на повехностях пластинки отсутствуют.

Граничные условия для двухслойной упругой пластинки имеют вид (1.3), а начальные условия – (1.4).

Решение уравнение (1.1) будем искать в виде (1.8).

Подставляя выражение (1.9) в уравнение (1.1). с учетом вышеизложенного для $W_{n,m}(t)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение шестого порядка

$$\frac{d^6W_{n,m}}{dt^6} + A_1\frac{d^4W_{n,m}}{dt^4} + A_2\frac{d^2W_{n,m}}{dt^2} + A_3W_{n,m} = 0, \qquad (1.18)$$

где коэффициенты A_j равны:

$$A_1 = \frac{h_0^2Q_1 - \gamma Q_5}{h^2Q_4}; \quad A_2 = -\gamma\frac{h_0^2Q_2 - \gamma Q_6}{h^2Q_4};$$
$$A_3 = \gamma^2\frac{h_0^2Q_3 - \gamma Q_7}{h^2Q_4}; \quad \gamma = \left(\frac{\pi h_0}{l_1}n\right)^2 + \left(\frac{\pi h_0}{l_2}m\right)^2. \qquad (1.19)$$

Решение уравнения (1.18) ищем в виде

$$W_{n,m}(t) = W_0\exp\left(\frac{b_0}{h_0}\xi\cdot t\right), \qquad (1.20)$$

где ξ безразмерная частота,определяющая частоты собственных колебаний двухслойной упругой пластики.

Подставляя выражение (1.20) в уравнение (1.18), для частоты ξ получим алгебраическое уравнение шесиго порядка

$$\xi^6 + A_{10}\xi^4 + A_{20}\xi^4 + A_{30} = 0, \qquad (1.21)$$

где $A_{10} = \dfrac{Q_1' - \gamma Q_5'}{Q_4'}$; $A_2 = \gamma \dfrac{hQ_2' - \gamma Q_6'}{Q_4'}$; $A_3 = \gamma^2 \dfrac{Q_3' - \gamma Q_7'}{hQ_4'}$, (1.22)

а $Q_1' = P_2^2(1+h\rho)^2$; и введены безразмерные параметры:

$$h = \frac{h_1}{h_0};\quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_0};\quad P_2 = \frac{\mu_1}{\mu_0}; b = \frac{b_1}{b_0};\quad D_0 = \frac{1}{2(1-\nu_0)};\quad D_1 = \frac{1}{2(1-\nu_1)};$$

$\operatorname{Im}\xi_{10}, \operatorname{Im}\xi_{20}, \operatorname{Im}\xi_{30}$ являются минмыми величинами корней уравнения (1.21), при этом корны равны

$$\xi_{1,2} = \pm\operatorname{Im}\xi_{10};\quad \xi_{3,4} = \pm\operatorname{Im}\xi_{30};\quad \xi_{5,6} = \pm\operatorname{Im}\xi_{40}.$$

Исходя из характера корней характеристического уравнения (1.21), общее решение задачи можем записать в виде

$$W_{n,m} = C_1\cos\left(\frac{b_0}{h_0}\xi_1\cdot t\right) + C_2\sin\left(\frac{b_0}{h_0}\xi_1\cdot t\right) + C_3\cos\left(\frac{b_0}{h_0}\xi_2\cdot t\right) +$$
$$+ C_4\sin\left(\frac{b_0}{h_0}\xi_2\cdot t\right) + +C_5\cos\left(\frac{b_0}{h_0}\xi_3\cdot t\right) + C_6\sin\left(\frac{b_0}{h_0}\xi_3\cdot t\right). \qquad (1.23)$$

Для определения постоянных C_j представим функции начальных условий $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ в виде (1.15).

Удовлетворяя решение (1.8) с выражениями (1.23) – (1.15) начальными условиями (1.2а), для C_j получим выражения:

$$C_1 = \frac{\xi_2^2\xi_3^2}{\xi_1(\xi_1^2-\xi_2^2)(\xi_1^2-\xi_3^2)}\frac{h_0}{b_0}\psi(x,y);$$
$$C_2 = -\frac{\xi_2^2\xi_3^2}{(\xi_1^2-\xi_2^2)(\xi_1^2-\xi_3^2)}\varphi(x,y);$$
$$C_3 = -\frac{\xi_1^2\xi_2^2}{\xi_2(\xi_1^2-\xi_2^2)(\xi_1^2-\xi_3^2)}\frac{h_0}{b_0}\psi(x,y);$$
$$(1.24)$$
$$C_4 = \frac{\xi_1^2\xi_3^2}{(\xi_1^2-\xi_2^2)(\xi_1^2-\xi_3^2)}\varphi(x,y);$$
$$C_5 = \frac{\xi_1^2\xi_2^2}{\xi_3(\xi_2^2-\xi_3^2)(\xi_1^2-\xi_3^2)}\frac{h_0}{b_0}\psi(x,y);$$
$$C_6 = -\frac{\xi_1^2\xi_2^2}{(\xi_2^2-\xi_3^2)(\xi_1^2-\xi_3^2)}\varphi(x,y).$$

Подставляя (1.24) в выражения (1.25) –(1.8) получаем решение задачи о вынужденных колебаниях кусочно-однородных двухслойных упругих пластинок, шарнирно опертых по краям

$$W=\sum_{n,m=1}^{\infty}\Big(\frac{\xi_2^2\xi_3^2}{(\xi_1^2-\xi_2^2)(\xi_1^2-\xi_3^2)}\Big(\frac{h_0}{b_0\,\xi_1}\psi_{n,m}\sin(\frac{b_0}{h_0}\xi_1 t)+\varphi_{n,m}\cos(\frac{b_0}{h_0}\xi_1 t)\Big)-$$
$$-\Big(\frac{\xi_1^2\xi_3^2}{(\xi_1^2-\xi_2^2)(\xi_2^2-\xi_3^2)}\Big(\frac{h_0}{b_0\,\xi_2}\psi_{n,m}\sin(\frac{b_0}{h_0}\xi_2 t)+\varphi_{n,m}\cos(\frac{b_0}{h_0}\xi_2 t)\Big)+ \qquad (1.25)$$
$$+-\Big(\frac{\xi_1^2\xi_2^2}{(\xi_1^2-\xi_3^2)(\xi_2^2-\xi_3^2)}\Big(\frac{h_0}{b_0\,\xi_3}\psi_{n,m}\sin(\frac{b_0}{h_0}\xi_2 t)+\varphi_{n,m}\cos(\frac{b_0}{h_0}\xi_3 t)\Big)\otimes$$
$$\otimes\sin\left(\frac{\pi n}{l_1}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{l_2}y\right).$$

В часности, если $\varphi(x,y)=\varphi_0\sin\left(\frac{\pi n}{l_1}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{l_2}y\right);\quad \psi=0.$

для W получаем выражение

$$W(x,y,t)=\frac{\xi_2^2\xi_3^2}{(\xi_1^2-\xi_2^2)(\xi_1^2-\xi_3^2)}\cos\left(\frac{b_0}{h_0}\xi_1 t\right)\varphi_0\sin\left(\frac{\pi n}{l_1}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{l_2}y\right).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

1. Показано, что простейшим приближенным уравнением колебания двуслойной пластинки является уравнение шестого порядка по производным, описывающим ее продольно – поперечное колебание.
2. Полученное общее и приближенные уравнения в явном виде содержат как вязкоупругие операторы, описывающие реологическое поведение материала кусочно – однородных пластин, так и функция внешних усилий, воздействующих на пластинку.
3. Полученные формулы для определения перемещений и напряжений через искомые функций в любой точки двуслойной пластинки.
4. Вынужденные колебания прямоугольных шарнирно опертых двуслойных пластин.
5. Воздействие подвижной нагрузки на поверхность двуслойной пластинки.
6. Воздействие нормальной нагрузки на бесконечную двуслойную пластинку.

Использованная литература

1.Александров А.Я., Брюккер Л.Э. и др. Расчёт трёхслойных панелей. –М., Оборонгиз,I960-с.271.

2.Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания. – 2-е изд. , доп. –М., 1987.-360с.

3.Бабамурадов К.Ш. К иследованию колебаний трёхслойных панелей. – Вопросы вычислительной математики и техники, науки, УзССР, Ташкент, 1965, вып.5.с.

4.Баев Л.В. Расчёт многослойных пластинок с учётом поперечного сдвига и обжатия. – Динамика сплошной среды, Новосибирск , 1970. вып. 6.
5.Бленд Н.В. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
6.Бейтман Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1969. 318 с.
7.Белинков С.Н. и др. Симметричные колебания трёхслойных пластин. – Прикладная механика, Т.8. вып. 7, 1972.
8.Бляхман Р.И. Колебания бесконечной пластинки на упругом полупространстве под действием под действием подвижной нагрузки// Строит. мех. И расчёт сооружений.-№3. -1967.
9.Бляхман Р.И. Колебания бесконечной пластинки, лежачей на упругом полупространств, под действием движущейся нагрузки в условиях плоской задачи. – Изв. вузов. строительство и архитектура. 1967. - №2.
10.Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. –М.: Машиностроение, 1980 – 375 с.
11.Бублик Б.Н. Харпун Г.И. Некоторые задачи о собственных колебаниях трёхслойных пластин. – Математическая физика, 3, Киев, Наукова думка, 1969. с.
12.Власов Б.Ф.Об уравнениях теории изгиба пластин// изв.АН СССР. Отд-ие тех. наук. 1957. №12. С. 57-60.
13.Власов В.З. Избранные труды. Т.1.М. : Изд-ва АН СССР, 1962. С. 502-524.
14.Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
15.РахимовР.Х., УмаралиевН.,ДжалиловМ.Л Колебания двухслойных пластин постоянной толщины..// Computational nanotechnology, 2018. № 2. С. 52, 59.
15. ДжалиловМ.Л, Хаджиева С. Колбания двухслойной пластины постоянной толщины при нормальной нагрузке Наманган илмий техник журнал 2021йил
16.M.L.Jalilov, S.Khadzhieva. General analysis of the equations of transverse vibration of a piecewise homogeneous viscoelastic plate.Машинасозлик илмий-техника журнали. №2, 2022 йил web.andmiedu.uz
17.M.L.Jalilov, S.Khadzhieva .Oscillations of piecewise homogeneous two-layer plates. Monograph. — Fergana: Издательство «Classic», 2022. — 67 pages.
18.M.L.Jalilov, S. Khodjaeva.AlizhanovaX .EQUATIONS OF TRANSVERSAL VIBRATION OF A TWO-LAYER VISCOELASTIC PLATE OF CONSTANT THICKNESS. Equations of Transversal Vibration of a Two-Layer Viscoelastic Plate of Constant Thickness | Middle European Scientific Bulletin
https://cejsr.academicjournal.io/index.php/journal/article/view/1562.
19.Джалилов М.Л. Воздействие нормальной нагрузки на бесконечную кусочно-однородную двухслойную пластинку. – Деп. в ВНИИНТПИ, 16.03.90. -№10638.
20.Джалилов М.Л. Точная трехмерная краевая задача для кусочно-однородных пластин // АндМИ. III Международная конференция. 18-19 апрель. 2014.
21.Прусаков А.П. Устойчивость и свободные колебания трехслойных ортотропных пластин с жёстким заполнителем. – Проблемы устойчивости в строительной механике. – М. : Стройиздат, 1965.

22.Работнов Ю.Н. Механика деформируемого тела. – М. : Наука,1977. – 384 с.
23.Работнов Ю.Н. Механика деформируемого тела. – М.: Наука, 1988.– 712 с.
24.Рахматуллин Х.А., Саатов Я.У., Сабодиш П.Ф., Филиппов И.Г. Двумерные задачи по неустановившемуся движению сплошных средах. – Ташкент : Фан, 1969. – 288 с.
25.Рябов А.Ф. Поперечные колебания многослойных оболочек. – Динамика и прочность машин, Харьков, вып.9.
26.Тамуров Н.Г., Николенко Л.Ф. Изгиб многосвязных двуслойных пластин. – Прикладная механика, 1972, Т. 7, вып. 1.