

STUDY OF PARTICLE MOTION IN NONINERTIAL NUMERAL SYSTEMS BASED ON LAGRANGIAN FORMALISM

J. A. Xatamov

S. Sh. Maxsumov

Jizzakh State Pedagogical University

E-mail: jaxongir.xatamov@jdpu.uz

Abstract

The motion of a particle in non-inertial reference frames is investigated within the Lagrangian formalism. Starting from the Lagrangian of an inertial frame, the general Lagrangian of a frame that is both accelerating and rotating is derived, and the translational, centrifugal, Coriolis and Euler inertial forces follow from the Euler–Lagrange equations. For a uniformly rotating frame, the equations of motion in polar coordinates, the conserved generalized momentum and the Jacobi integral are analyzed, and numerical estimates for the Earth are given.

Keywords: Non-inertial frame, Lagrangian, generalized coordinates, centrifugal force, Coriolis force, Jacobi integral.

Introduction

NOINERTSIAL SANOQ SISTEMALARIDA ZARRACHALAR HARAKATINING LAGRANJ FORMALIZMI ASOSIDA TADQIQI

J. A. Xatamov,

S. Sh. Maxsumov

Jizzax davlat pedagogika universiteti

E-mail: jaxongir.xatamov@jdpu.uz

Annotatsiya

Maqolada zarrachaning noinertsial sanoq sistemalaridagi harakati Lagranj formalizmi asosida tadqiq etiladi. Inertsial sanoq sistemasidagi Lagranj funksiyasidan koordinatalar almashtirish orqali ilgarilanma tezlanish bilan harakatlanuvchi va aylanuvchi sanoq sistemasi uchun umumiy Lagranj funksiyasi olinadi. Eyler–Lagranj tenglamalaridan inersiya kuchlari - ilgarilanma, markazdan qochma, Koriolis va Eyler kuchlari - kelib chiqishi ko'rsatiladi. Tekis aylanuvchi sistemada qutb koordinatalaridagi harakat tenglamalari, umumlashtirilgan impulsning saqlanishi va Jakobi integrali tahlil qilinadi, Yer sharoiti uchun miqdoriy baholar keltiriladi.

Kalit so'zlar: noinertsial sanoq sistemasi, Lagranj funksiyasi, umumlashtirilgan koordinatalar, markazdan qochma kuch, Koriolis kuchi, Jakobi integrali.

Kirish

Nyuton mexanikasining qonunlari faqat inertsial sanoq sistemalarida o‘rinli. Biroq amaliy masalalarning ko‘pchiligida - Yer sirtidagi harakatlar, aylanuvchi mexanizmlar, kosmik apparatlar dinamikasi, atmosfera va okean oqimlari - kuzatuvchi noinertsial sanoq sistemasi bilan bog‘liq bo‘ladi. Bunday sistemalarda harakat tenglamalari odatda “inersiya kuchlari”ni qo‘shimcha kiritish orqali yoziladi. Lagranj formalizmi esa bu kuchlarning kelib chiqishini tabiiy ravishda ochib beradi: tenglamalar koordinatalarni tanlashga bog‘liq bo‘lmaydi, bog‘lanishlar oson hisobga olinadi, simmetriyalar va saqlanish qonunlari o‘rtasidagi aloqa (Neter teoremasi) yaqqol ko‘rinadi [1, 2].

Ushbu maqolada asosiy maqsad qilib quyidagilar olindi: noinertsial sanoq sistemasi uchun umumiy Lagranj funksiyasini tuzish, undan inersiya kuchlarini keltirib chiqarish va tekis aylanuvchi sistemada umumlashtirilgan koordinatalar yordamida harakat integrallarini tahlil qilish.

Noinertsial sanoq sistemasida Lagranj funksiyasi

Inertsial sanoq sistemasi K da massasi m bo‘lgan zarrachaning Lagranj funksiyasi $L = T - U$ ko‘rinishda bo‘ladi, bunda T - kinetik, U - potensial energiya. K' sistemaning boshi K ga nisbatan $\vec{V}$ tezlik va $\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ tezlanish bilan harakatlansin, K' ning burchak tezligi $\vec{\Omega}$ bo‘lsin. Zarrachaning K' dagi radius-vektori $\vec{r}$, nisbiy tezligi $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ bo‘lsa, K dagi tezlik [3,4]

$$\vec{u} = \vec{V} + \vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (1)$$

va Lagranj funksiyasi quyidagicha yoziladi:

$$L = \frac{m}{2} (\vec{V} + \vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r})^2 - U(\vec{r}, t) \quad (2)$$

Qavsni ochib, faqat vaqtga bog‘liq $\frac{m}{2} \vec{V}^2$ hadni tashlab yuboramiz. Funksiyaning to‘liq vaqt bo‘yicha hosilasi qo‘shilsa harakat tenglamalari o‘zgarmasligi sababli,

$$m\vec{V} \cdot (\vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) = \frac{d}{dt} (m\vec{V} \cdot \vec{r}) - m\vec{W} \cdot \vec{r} \quad (3)$$

munosabatdan foydalanib, umumiy Lagranj funksiyasini hosil qilamiz:

$$L = \frac{m}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + m\vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \frac{m}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 - m\vec{W} \cdot \vec{r} - U(\vec{r}, t) \quad (4)$$

Bu ifodada birinchi had - nisbiy harakatning kinetik energiyasi; ikkinchi had tezlikka chiziqli bog‘liq (giroskopik) had bo‘lib, Koriolis kuchini beradi; uchinchi had markazdan qochma potensialni, to‘rtinchi had esa ilgarilanma tezlanishni ifodalaydi.

Umumlashtirilgan koordinatalar va harakat tenglamalari

Ixtiyoriy umumlashtirilgan koordinatalar q_i uchun Eyler-Lagranj tenglamalari $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ko‘rinishga ega. Dekart koordinatalarida vektor shaklda yozamiz: [1,5]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0 \quad (5)$$

Umumlashtirilgan impuls va koordinata bo‘yicha hosila mos ravishda

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}} = m(\vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m\vec{v} \times \vec{\Omega} + m\vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega}) - m\vec{W} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \quad (7)$$

ga teng. E'tibor bering: umumlashtirilgan impuls $\vec{p}$ nisbiy tezlikka mos $m\vec{v}$ ga teng emas, u zarrachaning inertsiyal sistemadagi impulsiga tengdir. (5) tenglamaga (6) va (7) ni qo'yib, $\frac{d}{dt}(\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \vec{v}$ ekanini hisobga olsak, harakat tenglamasini olamiz:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W} + 2m\vec{v} \times \vec{\Omega} + m\vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega}) + m\vec{r} \times \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \quad (8)$$

Tenglamaning o'ng tomonidagi qo'shimcha hadlar inersiya kuchlaridir:

$$\vec{F}_{tr} = -m\vec{W}, \quad \vec{F}_{cf} = m\vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega}) \quad (9)$$

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\Omega} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}, \quad \vec{F}_E = m\vec{r} \times \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \quad (10)$$

Ilgarilanma kuch $\vec{F}_{tr}$ sistema boshining tezlanishidan, markazdan qochma kuch $\vec{F}_{cf}$ aylanish o'qidan tashqariga yo'nalgan va kattaligi aylanish o'qigacha masofaga proporsional, Koriolis kuchi $\vec{F}_C$ esa tezlikka perpendikulyar bo'lgani uchun ish bajarmaydi. Eyler kuchi $\vec{F}_E$ faqat $\vec{\Omega}$ vaqt bo'yicha o'zgarganda paydo bo'ladi.

Tekis aylanuvchi sistemada qutb koordinatalaridagi tahlil

Endi $\vec{\Omega} = \omega \vec{e}$ o'zgarmas, $\vec{W} = 0$ hol uchun silindrik koordinatalar ρ, φ, z ni umumlashtirilgan koordinatalar sifatida tanlaymiz. Bu holda $\vec{v} \cdot \vec{v} = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$, $\vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \omega \rho^2 \dot{\varphi}$ va $(\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 = \omega^2 \rho^2$ bo'lgani uchun

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + m\omega \rho^2 \dot{\varphi} + \frac{m}{2}\omega^2 \rho^2 - U(\rho, \varphi, z) \quad (11)$$

Eyler-Lagranj tenglamalari quyidagi ko'rinishni oladi:

$$m\ddot{\rho} = m\rho(\dot{\varphi} + \omega)^2 - \frac{\partial U}{\partial \rho} \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt}[m\rho^2(\dot{\varphi} + \omega)] = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (13)$$

Radial tenglamadagi $m\rho\dot{\varphi}^2$ had inertsiyal sistemadagi kabi markazdan qochma effektni, $2m\omega\rho\dot{\varphi}$ had Koriolis kuchining radial tashkil etuvchisini, $m\omega^2\rho$ had esa sistemaning aylanishidan kelib chiqqan markazdan qochma kuchni beradi. Dekart koordinatalarida $F_z = 0$ bo'lgan tekislikdagi harakat uchun

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \omega^2 x - \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -2\omega\dot{x} + \omega^2 y - \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial y} \quad (14)$$

tenglamalar hosil bo'ladi: Koriolis tezlanishi tezlik vektorini doimo o'ngga ($\omega > 0$ da) burib turadi.

Saqlanuvchi kattaliklar

Agar U potensial φ burchakka bog'liq bo'lmasa (markaziy maydon), φ sikl koordinata bo'ladi va unga qo'shma impuls saqlanadi:[6.7]

$$p_\varphi = m\rho^2(\dot{\varphi} + \omega) = l = \text{const} \quad (15)$$

l — zarrachaning inertsiyal sistemadagi burchak momenti. Lagranj funksiyasi vaqtga oshkor bog'liq emasligi uchun Jakobi integrali ham saqlanadi:

$$E' = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{m}{2}\omega^2 \rho^2 + U \quad (16)$$

Bu ifoda to'la energiya emas: giroskopik had integralga hissa qo'shmaydi, ya'ni Koriolis kuchi energiyani o'zgartirmaydi, markazdan qochma kuch esa $-\frac{m}{2}\omega^2 \rho^2$ effektiv potensial bilan hisobga olinadi. Markaziy maydonda l ni qo'yib, radial harakat tenglamasini

$$m\ddot{\rho} = \frac{l^2}{m\rho^3} - \frac{dU}{d\rho} \quad (17)$$

ko‘rinishda olamiz: u inertsial sistemadagi radial tenglama bilan bir xil. Demak, sistemaning aylanishi radial masofa dinamikasini o‘zgartirmaydi, faqat burchak koordinata φ ning vaqt bog‘liqligini $\dot{\varphi} + \omega$ orqali siljitadi.

Yer sharoiti uchun baholar.

Yerning o‘z o‘qi atrofida aylanish burchak tezligi $\Omega \approx 7,292 \cdot 10^{-5}$ rad/s. Yer sirtidagi zarracha uchun Koriolis tezlanishining eng katta qiymati va ekvatoridagi markazdan qochma tezlanish[8,9]

$$a_c = 2\Omega v, \quad a_{cf} = \Omega^2 R \quad (18)$$

ga teng, bunda R — Yer radiusi ($\approx 6,371 \cdot 10^6$ m). $v = 100$ m/s uchun $a_c \approx 1,46 \cdot 10^{-2}$ m/s², $a_{cf} \approx 3,4 \cdot 10^{-2}$ m/s² bo‘lib, bu erkin tushish tezlanishining taxminan 0,35 % ini tashkil qiladi. Ko‘rinadiki, kichik tezliklarda Koriolis kuchi ahamiyatsiz, ammo uzoq masofalarda (ballistika, atmosfera sirkulyatsiyasi) hal qiluvchi bo‘ladi. Foucault mayatnigi tebranish tekisligining burilish burchak tezligi ham shu formalizmdan olinadi:

$$\omega_F = \Omega \sin \theta \quad (19)$$

bunda θ — geografik kenglik.

Yuqoridagi hisob kitoblarga ko‘ra quyidagi xulosaga kelishimiz mumkin: noinertsial sanoq sistemasi uchun umumiy Lagranj funksiyasi (4) olindi va undan harakat tenglamasi (8) hamda ilgarilanma, markazdan qochma, Koriolis va Eyler kuchlari keltirib chiqarildi. Qutb koordinatalarida tekis aylanuvchi sistemaning harakat tenglamalari tahlil qilindi, umumlashtirilgan impuls va Jakobi integralining saqlanishi ko‘rsatildi. Lagranj formalizmi inersiya kuchlarini kinematik hisoblar o‘rniga yagona skalyar funksiya orqali berishi va saqlanish qonunlarini tabiiy ravishda aniqlashi bilan qulaydir. Natijalardan aylanuvchi mexanizmlar, geofizik oqimlar va orbital dinamika masalalarida foydalanish mumkin.

Adabiyotlar

- [1] Landau L. D., Lifshitz E. M. Mechanics. Course of Theoretical Physics, Vol. 1. 3rd ed. - Oxford: Butterworth-Heinemann, 1976.
- [2] Fayzullayev B.A. Nazariy mexanika. — Toshkent: Cho‘lpon, 2011.
- [3] Ahmadxo‘jayev B. Nazariy mexanika. — Toshkent: Yangi asr avlodi, 2006
- [4] Taylor J. R. Classical Mechanics. — Sausalito: University Science Books, 2005.
- [5] Ismayilov K., Mustafayev U., Quldashev A. Nazariy mexanika.- Toshkent: Mashhur press, 2017.
- [6] Fayzullayev B.A. Nazariy fizika kursi. 1-jild: Nazariy mexanika. - Toshkent. 2011.
- [7] Rashidov T., Shoziyotov Sh., Mo‘minov Q.B. Nazariy mexanika asoslari. - Toshkent: O‘qituvchi, 1990.
- [8] Ismayilov K., Mustafayev U., Quldashev A. Nazariy mexanika. - Toshkent: Mashhur press, 2017.
- [9] Saydullayev U.J. Nazariy mexanika fanidan masalalar to‘plami. - Samarqand: Samarqand davlat universiteti, 2023.