

COVARIANT FORMULATION OF CURVED SPACE-TIME ELECTROMAGNETIC FIELD EQUATIONS

J. A. Xatamov

S. Sh. Maxsumov

Jizzakh State Pedagogical University

E-mail: jaxongir.xatamov@jdpu.uz

Abstract

The tensor form of Maxwell's equations in curved spacetime is studied using the metric tensor, the covariant derivative and the electromagnetic field tensors. The covariant homogeneous and inhomogeneous equations, charge conservation and the Einstein–Maxwell system are discussed and illustrated for the Reissner–Nordström metric.

Keywords: Maxwell's equations, metric tensor, covariant derivative, electromagnetic field tensor, curved space-time, Einstein–Maxwell equations.

Introduction

EGRI FAZO-VAQTDA ELEKTROMAGNIT MAYDON TENGLAMALARINING KOVARIANT FORMULALANISHI

J. A. Xatamov

S. Sh. Maxsumov

Jizzax davlat pedagogika universiteti

E-mail: jaxongir.xatamov@jdpu.uz

Annotatsiya

Maxwell tenglamalarining egri fazo-vaqtda tensor ko'rinishda yozilishi o'rganiladi. Metrik tenzor, Kristoffel simvollar, kovariant hosila, elektromagnit maydon tenzori va uning duali kiritilib, bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan tenglamalarning kovariant shakli keltiriladi. Zaryadning saqlanish qonuni, energiya-impuls tenzori va Eynshteyn–Maxwell tenglamalari muhokama qilinadi, natijalar Reissner–Nordström metrikasi misolida ko'rsatiladi.

Kalit so'zlar: Maxwell tenglamalari, metrik tenzor, kovariant hosila, elektromagnit maydon tenzori, egri fazo-vaqt, Eynshteyn–Maxwell tenglamalari.

Kirish

Maxwell tenglamalari klassik elektrodinamikaning asosi bo'lib, tekis (Minkovskiy) fazo-vaqtda Lorens-kovariant ko'rinishga ega. Umumiy nisbiylik nazariyasida esa fizik qonunlar koordinatalar tanlanishiga bog'liq bo'lmisligi, ya'ni umumiy kovariantlik prinsipiga bo'ysunishi talab qilinadi. Ekvivalentlik prinsipiga ko'ra, fazo-vaqtning har bir nuqtasi atrofida uni tekis deb olish mumkin, shuning uchun egri fazo-vaqtdagi tenglamalar «minimal

bog'lanish» qoidasi bilan olinadi: Minkovskiy metrikasi $\eta_{\mu\nu}$ o'rniga $g_{\mu\nu}$, oddiy hosila ∂_μ o'rniga esa kovariant hosila ∇_μ qo'yiladi. Natijada elektromagnit maydon tenglamalari gravitatsion maydon mavjudligida ham o'z tuzilishini saqlaydi, gravitatsiya esa metrik tenzor orqali tenglamalarga kiradi. Ushbu tezisda shu formalizmning asosiy elementlari bayon etiladi.

Egri fazo-vaqtning geometrik apparati

Egri fazo-vaqtda interval kvadrati metrik tenzor yordamida aniqlanadi:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1)$$

bunda signatura $(+, -, -, -)$, yunon indekslar 0 dan 3 gacha qiymat oladi va takrorlanuvchi indekslar bo'yicha yig'indi nazarda tutiladi. Metrik tenzor va unga teskari $g^{\mu\nu}$ ($g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$) indekslarni ko'tarish va tushirish uchun xizmat qiladi. Parallel ko'chirishni ifodalovchi Kristoffel simvollar metrikadan quyidagicha hosil bo'ladi:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (2)$$

Kontravariant va kovariant vektorlarning kovariant hosilalari mos ravishda

$$\nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu A^\lambda, \quad (3)$$

$$\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda \quad (4)$$

ko'rinishga ega; yuqori tartibli tenzorlar uchun har bir indeksga shunday had qo'shiladi. Kristoffel simvollar metrikadan olingani uchun kovariant hosila metrik bilan muvofiq:

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (5)$$

shu sababli indekslarni ko'tarish va hosila olish amallarining tartibi ahamiyatsiz. Bundan tashqari $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ (burilish yo'q), bu keyingi natijalar uchun muhim.

Elektromagnit maydon tenzorlari

Elektromagnit maydon to'rt-potensial A_μ orqali tavsiflanadi, maydon kuchlanganlik tenzori esa

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (6)$$

Kristoffel simvollarining simmetrikligi tufayli hosilalardagi Γ hadlar o'zaro yo'qoladi, ya'ni $F_{\mu\nu}$ ta'rifida metrik bevosita qatnashmaydi. Tenzor antisimmetrik bo'lgani uchun 6 ta mustaqil komponentaga ega; lokal inersial sanoq sistemasida ular elektr maydon E va magnit induksiya B komponentalariga mos keladi. Kontravariant ko'rinishi metrik yordamida olinadi:

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (7)$$

Maydon tenzori kalibrovkaviy o'zgarishlarga nisbatan invariant: $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$ almashtirishda $F_{\mu\nu}$ o'zgarmaydi, chunki skalyar funksiya uchun $\nabla_\mu \nabla_\nu \lambda = \nabla_\nu \nabla_\mu \lambda$.

Dual tenzor Levi-Chivita tenzori $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \pm[\mu\nu\rho\sigma]/\sqrt{(-g)}$ orqali (ishora yo'nalish tanloviga bog'liq)

$$\star F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (8)$$

kiritiladi. Ikkita skalyar invariant mavjud: $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2/c^2)$ va $F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu}$, ikkinchisi $E \cdot B$ ga proporsional.

Maxwell tenglamalarining kovariant ko‘rinishi

Maxwell tenglamalari ikki guruhga bo‘linadi. Birinchisi — bir jinsli tenglamalar (Faradey qonuni va magnit zaryadlarning yo‘qligi):

$$\nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} = 0. \quad (9)$$

Bu Bianchi ayniyati bo‘lib, $F_{\mu\nu}$ potentsialdan hosil qilinganligi sababli o‘z-o‘zidan bajariladi; unga ekvivalent yozuv $\nabla_\mu \star F^{\mu\nu} = 0$. Ikkinchi guruh — bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar (Gauss va Ampyer–Maxwell qonunlari):

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \quad (10)$$

bunda J^ν — to‘rt-tok zichligi. Antisimmetrik tenzor uchun Kristoffel simvollarining ikkita hadi yo‘qoladi va $\Gamma_{\mu\lambda}^\mu = \partial_\lambda \ln \sqrt{-g}$ munosabati tufayli tenglama faqat oddiy hosilalarni o‘z ichiga olgan qulay shaklga keladi:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = \mu_0 J^\nu. \quad (11)$$

Bu tenglamaning ν bo‘yicha divergensiyasi $F^{\mu\nu}$ antisimmetrikligi tufayli nolga teng bo‘lib, zaryadning saqlanish qonunini beradi:

$$\nabla_\nu J^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} J^\nu) = 0. \quad (12)$$

Lorens kalibrovkasi $\nabla_\mu A^\mu = 0$ da, kommutator $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R_{\sigma\mu\nu}^\rho V^\sigma$ konvensiyasida, potentsial uchun to‘lqin tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu A^\nu - R_{\sigma}^\nu A^\sigma = \mu_0 J^\nu. \quad (13)$$

Bu yerda $R_{\sigma\nu}$ — Ritchi tenzori. Ritchi hadi egrilikning elektromagnit to‘lqinlar tarqalishiga bevosita ta‘sirini ifodalaydi; tekis fazo-vaqtda u yo‘qoladi va oddiy to‘lqin tenglamasi tiklanadi.

Zaryadli zarracha harakati va Eynshteyn–Maxwell tenglamalari

Massasi m va zaryadi q bo‘lgan zarrachaning egri fazo-vaqtdagi harakat tenglamasi geodezik tenglamaning Lorens kuchi bilan umumlashmasidir (u^μ — to‘rt-tezlik):

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = \frac{q}{m} F_{\nu}^\mu u^\nu. \quad (14)$$

Maydonning energiya-impuls tenzori simmetrik va izsiz bo‘lib, quyidagicha yoziladi:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(-F^{\mu\alpha} F_{\alpha}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right), \quad (15)$$

uning divergensiyasi esa Lorens kuch zichligini beradi:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = -F^{\nu\lambda} J_\lambda. \quad (16)$$

Maydon va geometriya o‘zaro Eynshteyn–Maxwell tenglamalari bilan bog‘lanadi: elektromagnit maydon $T_{\mu\nu}$ orqali metrikani egadi, egri metrik esa Maxwell tenglamalari yordamida maydonga qayta ta‘sir qiladi:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (17)$$

Reissner–Nordström metrikasi

Geometrik birliklarda ($G = c = 1$) zaryadlangan sferik simmetrik massa uchun metrika

$$ds^2 = f(r) dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (18)$$

Statik Kulon potentsiali $A_t = Q/r$ uchun noldan farqli komponenta $F_{rt} = -Q/r^2$. Bu yerda $\sqrt{(-g)} = r^2 \sin \theta$ bo'lgani uchun (10) dagi bir jinsli bo'lmagan tenglama vakuumda

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_r (r^2 \sin \theta F^{rt}) = 0 \Rightarrow F^{rt} = \frac{Q}{r^2}. \quad (19)$$

ko'rinishni oladi. Natija $g^{tt}g^{rr} = -1$ bo'lgani uchun $f(r)$ ga bog'liq emas: maydon Kulon qonuni shaklini saqlaydi, geometriya esa $T_{\mu\nu}$ orqali Q^2/r^2 had sifatida $f(r)$ ga kiradi.

Olingan tenglamalar qora tuynuklar atrofida maydonlarni, gravitatsion linzalashni va plazma optikasida yorug'lik nurlarining egilishini o'rganishda asos bo'lib xizmat qiladi.

Yuqoridagi hisob kitoblarga ko'ra quyidagi xulosaga kelishimiz mumkin: Egri fazo-vaqtda Maxwell tenglamalari minimal bog'lanish orqali kovariant ko'rinishga keltirilib, bir jinsli tenglamalar Bianchi ayniyati, bir jinsli bo'lmaganlari esa $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$ ko'rinishida yozildi. Zaryadning saqlanishi, potensial tenglamasidagi Ritchi hadi va Eynshteyn–Maxwell tizimi ko'rsatildi. Reissner–Nordström misoli maydon tenglamasining metrik determinant orqali sodda integrallanishini tasdiqlaydi.

Adabiyotlar

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1975.
2. Abdumalikov A.A. Elektrodinamika. Nazariy fizika kursi: Darslik. - Toshkent: 2003.
3. Abduraxmanov Q.P., Xamidov V.S., Axmedova N.A. Fizika: Darslik. – T.: «Aloqachi», 2018.
4. Turayev S.J., Ximmataliyev D.O., Beknozarova Z.F. Fizika (Elektrostatika. Elektromagnetizm. Tebranishlar va to'lqinlar): O'quv qo'llanma. – T.: «Nihol print», 2021.

